Exámenes de Selectividad

Física. Cataluña 2022, Extraordinaria

mentoor.es

Cuestión 1. Campo Gravitatorio

Escribe la expresión del trabajo de una fuerza y su relación con la energía potencial si la fuerza es conservativa. Un satélite gira alrededor de la Tierra siguiendo una órbita circular. Razona qué trabajo realiza la fuerza gravitatoria cuando el satélite recorre un cuarto de la órbita. ¿Y si recorre una órbita completa?

Solución:

El campo gravitatorio es un campo conservativo, por lo que el trabajo realizado por una fuerza conservativa entre dos puntos A y B depende únicamente de las posiciones inicial y final, y no de la trayectoria seguida. La expresión del trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ al desplazarse desde el punto A hasta el punto B se define como:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Para una fuerza gravitatoria, la fuerza ejercida sobre una masa puntual m debido a la Tierra con masa M está dada por:

$$\vec{F} = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{r},$$

donde:

- G es la constante de gravitación universal,
- r es la distancia entre los centros de masa de la Tierra y el satélite,
- $\vec{r}$ es el vector unitario en la dirección radial.

Sustituyendo $\vec{F}$ en la expresión del trabajo:

$$W_{A\to B} = \int_{r_A}^{r_B} \left(-G\frac{M \cdot m}{r^2}\right) dr = -GMm \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = -GMm \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_A}^{r_B} = GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right).$$

La energía potencial gravitatoria E_p está relacionada con el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria:

$$W_{A\to B} = E_{pA} - E_{pB}, \quad \text{donde} \quad E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}.$$

Ahora, consideremos el caso de un satélite que gira alrededor de la Tierra siguiendo una órbita circular. En una órbita circular, el radio r es constante, es decir, $r_A = r_B = r$. Por lo tanto, la expresión del trabajo se simplifica:

$$W_{A\to B} = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\right) = 0 \text{ J}.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es cero tanto al recorrer un cuarto de la órbita como al completar una órbita completa.

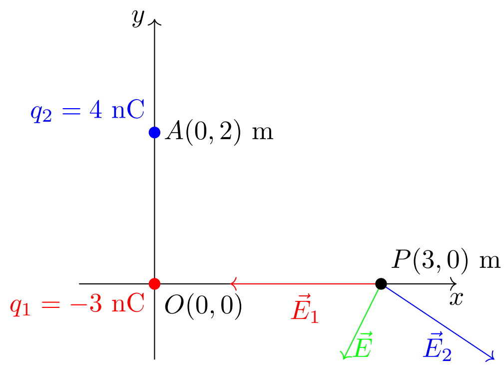
Cuestión 2. Campo Electromagnético

Una carga $q_1 = -3$ nC se encuentra situada en el origen de coordenadas del plano XY. Una segunda carga de $q_2 = 4$ nC está situada sobre el eje Y positivo a 2 m del origen. Calcula el vector campo eléctrico creado por cada una de las cargas en un punto P situado a 3 m del origen sobre el eje X positivo y el campo eléctrico total creado por ambas.

Dato: constante de Coulomb, $k = 9 \cdot 10^9$ N $\cdot$ m^2/C^2

Solución:

Primero, hacemos un esquema de la situación para visualizar las posiciones:



Utilizaremos el principio de superposición y la fórmula del campo eléctrico generado por una carga puntual:

$$\vec{E} = k \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u}_r,$$

donde:

- $k = 9 \cdot 10^9$ N $\cdot$ m^2/C^2 es la constante de Coulomb,
- q es la carga que produce el campo,
- r es la distancia desde la carga hasta el punto P,
- $\vec{u}_r$ es el vector unitario desde la carga hacia el punto P.

Campo eléctrico debido a q_1 en P:

Calculamos la distancia r_1 y el vector unitario $\vec{u}_{r1}$:

$$r_1 = \sqrt{(x_P - x_{q1})^2 + (y_P - y_{q1})^2} = \sqrt{(3 \text{ m} - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 3 \text{ m},$$

$$\vec{u}_{r1} = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(-3\,\vec{i} + 0\,\vec{j})}{3} = -\vec{i}.$$

Aplicamos la fórmula:

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r1} = 9 \cdot 10^9 \,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{-3 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(3 \text{ m})^2} \cdot (-\vec{i}) = -3\,\vec{i} \text{ N/C}.$$

Campo eléctrico debido a q_2 en P:

Calculamos la distancia r_2 y el vector unitario $\vec{u}_{r2}$:

$$r_2 = \sqrt{(x_P - x_{q2})^2 + (y_P - y_{q2})^2} = \sqrt{(3 \text{ m} - 0)^2 + (0 - 2 \text{ m})^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \text{ m},$$

$$\vec{r}_2 = (3\,\vec{i} - 2\,\vec{j}) \text{ m},$$

$$\vec{u}_{r2} = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{3\ \vec{i} - 2\ \vec{j}}{\sqrt{13}}.$$

Aplicamos la fórmula:

$$\vec{E}_2 = k \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r2} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}}{13\ \mathrm{m}^2} \cdot \frac{3\ \vec{i} - 2\ \vec{j}}{\sqrt{13}} = 2,3\ \vec{i} - 1,54\ \vec{j})\ \mathrm{N/C}.$$

Campo eléctrico total en P:

Sumamos vectorialmente los campos:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (-3\ \vec{i}) + (2,30\ \vec{i} - 1,54\ \vec{j}) = -0,7\ \vec{i} - 1,54\ \vec{j})\ \mathrm{N/C}.$$

Módulo del campo eléctrico total:

$$|\vec{E}| = \sqrt{(-0,70\ \mathrm{N/C})^2 + (-1,54\ \mathrm{N/C})^2} = \sqrt{0,49 + 2,3716} = \sqrt{2,8616} = 1,69\ \mathrm{N/C}.$$

Por lo tanto, el campo eléctrico total en el punto P es $-0,70\ \vec{i} - 1,54\ \vec{j}$ N/C y su magnitud es $1,69$ N/C.

Cuestión 3. Campo Electromagnético

Dos cargas $q_1 = 8,9\ \mu$C y $q_2 = 17,8\ \mu$C se encuentran en el vacío y situadas, respectivamente, en los puntos $O(0,0,0)$ cm y $P(1,0,0)$ cm. Enuncia el teorema de Gauss para el campo eléctrico. Calcula, justificadamente, el flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica de radio $0,5$ cm centrada en el punto O. ¿Cambia el flujo si en lugar de una esfera se trata de un cubo de lado $0,5$ cm?

Dato: permitividad del vacío, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ C^2/Nm^2

Solución:

El *Teorema de Gauss* establece que el flujo eléctrico total Φ a través de una superficie cerrada S es igual a la carga total Q_{enc} encerrada por dicha superficie dividida por la permitividad del vacío ϵ_0. Matemáticamente, se expresa como:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0},$$

donde:

- $\vec{E}$ es el campo eléctrico,
- $d\vec{A}$ es un elemento diferencial de área de la superficie S, orientado hacia afuera,
- Q_{enc} es la carga neta encerrada dentro de la superficie S,
- $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ C^2/N $\cdot$ m^2 es la permitividad del vacío.

Consideremos una superficie esférica de radio $r = 0,5$ cm centrada en el punto $O(0,0,0)$ cm. Las cargas están ubicadas de la siguiente manera:

- $q_1 = 8,9\ \mu$C en el origen O.
- $q_2 = 17,8\ \mu$C en el punto $P(1,0,0)$ cm.

La carga q_1 está en el centro de la esfera, mientras que q_2 está a 1 cm del origen, fuera de la esfera de radio $0,5$ cm. Por lo tanto, la única carga encerrada por la superficie esférica es q_1. Aplicando el teorema de Gauss:

$$\Phi = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{q_1}{\epsilon_0}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$\Phi = \frac{8,9 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{8,85 \cdot 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2} = 1,006 \cdot 10^6\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}.$$

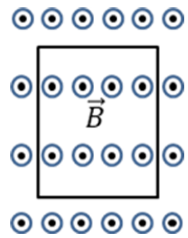
Consideremos ahora una superficie cúbica de lado $0,5$ cm centrada en el punto $O(0,0,0)$ cm. Al igual que con la esfera, la única carga encerrada por el cubo es q_1, ya que q_2 se encuentra fuera del cubo. El teorema de Gauss depende únicamente de la carga encerrada por la superficie cerrada, sin importar la forma de dicha superficie. Por lo tanto, el flujo eléctrico a través del cubo es el mismo que a través de la esfera:

$$\Phi = \frac{q_1}{\epsilon_0} = 1,006 \cdot 10^6\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}.$$

Por lo tanto, el flujo eléctrico a través de la superficie esférica es $\Phi = 1,006 \cdot 10^6$ N $\cdot$ m^2/C. Además, el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada depende únicamente de la carga encerrada y no de la forma de la superficie, por lo que el flujo no cambia si en lugar de una esfera se utiliza un cubo de lado $0,5$ cm y el flujo eléctrico seguirá siendo $\Phi = 1,006 \cdot 10^6$ N $\cdot$ m^2/C

Cuestión 4. Campo Electromagnético

En la figura se muestra una espira rectangular de lados 10 cm y 12 cm en el seno de un campo magnético $\vec{B}$ perpendicular al plano del papel y saliente. Se hace variar $|\vec{B}|$ desde 0 a 1 T en un intervalo de tiempo de 1, 2 s. Calcula la variación de flujo magnético y la fuerza electromotriz media inducida en la espira. Indica y justifica el sentido de la corriente eléctrica inducida.



Solución:

Primero, identifiquemos los datos proporcionados en el problema:

- Lados de la espira rectangular:
$$l_1 = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}, \quad l_2 = 12 \text{ cm} = 0,12 \text{ m}.$$
- Área de la espira:
$$S = l_1 \cdot l_2 = 0,10 \text{ m} \cdot 0,12 \text{ m} = 0,012 \text{ m}^2.$$
- Variación del campo magnético:
$$B_1 = 0 \text{ T}, \quad B_2 = 1 \text{ T}.$$
- Intervalo de tiempo:
$$\Delta t = 1,2 \text{ s}.$$

El flujo magnético Φ a través de la espira se define como:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos\alpha,$$

donde α es el ángulo entre el campo magnético $\vec{B}$ y la normal al plano de la espira. Dado que el campo magnético es perpendicular al plano de la espira y saliente, $\alpha = 0^\circ$ y $\cos\alpha = 1$. Por lo tanto, la variación del flujo magnético es:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = B_2 \cdot S \cdot \cos\alpha - B_1 \cdot S \cdot \cos\alpha = 1 \text{ T} \cdot 0,012 \text{ m}^2 \cdot 1 - 0 \text{ T} \cdot 0,012 \text{ m}^2 \cdot 1 = 0,012 \text{ Wb}.$$

Aplicamos la Ley de Faraday-Henry para determinar la fem inducida:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos:

$$\varepsilon = -\frac{0,012 \text{ Wb}}{1,2 \text{ s}} = -0,01 \text{ V}.$$

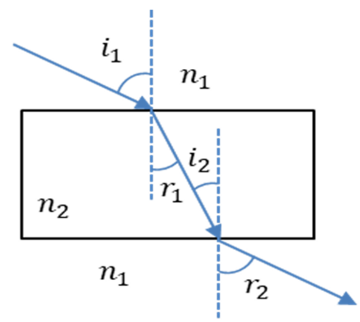
Según la Ley de Lenz, la corriente inducida genera un campo magnético que se opone a la variación del flujo magnético que la produjo. En este caso, el flujo magnético saliente está aumentando, por lo que la corriente inducida debe generar un campo magnético entrante para oponerse a este aumento. Para que el campo magnético generado por la corriente sea entrante, la corriente debe circular en sentido horario.

Por lo tanto, la solución es:

- **La variación del flujo magnético es $\boldsymbol{\Delta\Phi = 0,012}$ Wb.**
- **La fuerza electromotriz media inducida en la espira es $\varepsilon = -0,01$ V.**
- **El sentido de la corriente eléctrica inducida es horario, ya que debe generar un campo magnético entrante que se oponga al aumento del flujo magnético saliente.**

Cuestión 5. Ondas

Un rayo de luz incide sobre una lámina de caras plano-paralelas de índice de refracción n_2, situada en un medio de índice de refracción n_1. Demuestra que el rayo que emerge de la lámina es paralelo al rayo incidente.



Solución:

Primero, identifiquemos los datos proporcionados en el problema:

- Índice de refracción del medio incidente: n_1.
- Índice de refracción de la lámina: n_2.
- La lámina tiene caras plano-paralelas.
- El rayo de luz incide sobre la lámina con un ángulo de incidencia i_1.

La Ley de Snell relaciona el ángulo de incidencia i_1 con el ángulo de refracción r_1 al pasar de un medio con índice de refracción n_1 a otro con índice n_2:

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin r_1.$$

Al salir de la lámina hacia el medio original, aplicamos nuevamente la ley de Snell, pero esta vez el rayo refractado dentro de la lámina actúa como rayo incidente:

$$n_2 \cdot \sin i_2 = n_1 \cdot \sin r_2,$$

donde i_2 es el ángulo de incidencia dentro de la lámina y r_2 es el ángulo de refracción en el medio original. Debido a que las caras de la lámina son plano-paralelas, el ángulo de incidencia i_2 es igual al ángulo de refracción r_1:

$$i_2 = r_1.$$

Sustituyendo $i_2 = r_1$ en la segunda ecuación de Snell:

$$n_2 \cdot \sin r_1 = n_1 \cdot \sin r_2.$$

De la primera ecuación de Snell:

$$n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin r_1.$$

Igualando ambas expresiones:

$$n_1 \cdot \sin r_2 = n_1 \cdot \sin i_1.$$

Podemos deducir que:

$$\sin r_2 = \sin i_1 \quad \Rightarrow \quad r_2 = i_1.$$

Por lo tanto, hemos comprobado que que el rayo que emerge de la lámina es paralelo al rayo incidente.

Cuestión 6. Óptica

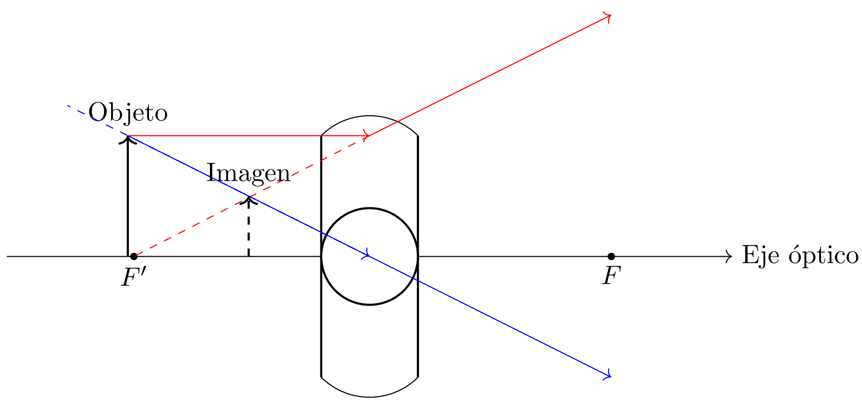
La imagen de un objeto real, dada por una lente delgada divergente, es siempre virtual, derecha y más pequeña que el objeto. Justifícalo mediante trazado de rayos y explica el porqué de dicho trazado. ¿Qué significa imagen virtual?

Solución:

Para demostrar que la imagen de un objeto real formada por una lente delgada divergente es siempre virtual, derecha y más pequeña que el objeto, utilizaremos el método de trazado de rayos y aplicaremos las leyes de la óptica geométrica. Las características de una lente divergente son:

- *Índice de refracción:* Menor que el medio circundante.
- *Foco:* Virtual, situado en el mismo lado que el objeto.
- *Focalidad:* Negativa, es decir, $f' < 0$.

Consideremos una lente divergente con un objeto real colocado a una distancia s del vértice de la lente:



- *Virtual:* La imagen es virtual porque se forma por la intersección de las prolongaciones de los rayos refractados, y no por la convergencia real de los rayos. No puede ser proyectada sobre una pantalla.
- *Derecha:* La imagen mantiene la orientación del objeto porque la magnificación es positiva.
- *Más Pequeña que el Objeto:* La magnificación (m) es menor que uno en valor absoluto, lo que indica que la imagen es reducida en comparación con el objeto.

Una *imagen virtual* es aquella que se forma cuando los rayos de luz refractados divergen y sus prolongaciones parecen converger en un punto detrás de la lente. A diferencia de una imagen real, una imagen virtual no puede ser capturada en una pantalla, ya que no existe una convergencia real de los rayos en el espacio.

Mediante el trazado de rayos en una lente delgada divergente, hemos demostrado que la imagen de un objeto real es siempre:

- **Virtual: Formada por la intersección de las prolongaciones de los rayos refractados.**
- **Derecha: Conserva la orientación del objeto.**
- **Más Pequeña que el Objeto: Presenta una magnificación menor a uno.**

Por lo tanto, la imagen emergente de una lente divergente cumple con las características mencionadas, confirmando que es virtual, derecha y más pequeña que el objeto.

Cuestión 7. Óptica

Explica en qué consiste la miopía utilizando los conceptos de la Óptica. ¿Qué tipo de lente hay que usar para corregirla? Si una persona miope se va acercando un objeto al ojo, existe una posición en la que ve bien, ¿por qué?

Solución:

La *miopía* es un defecto refractivo del ojo en el cual los objetos lejanos se ven borrosos porque los rayos de luz paralelos provenientes de ellos se enfocan *antes* de llegar a la retina. Ópticamente, esto ocurre debido a un *exceso de convergencia* del sistema óptico del ojo (córnea y cristalino), o porque el globo ocular es más largo de lo normal.

Para corregir la miopía, se utilizan *lentes divergentes* (cóncavas). Estas lentes tienen distancia focal negativa y hacen que los rayos de luz divergentes se enfoquen más atrás, permitiendo que la imagen se forme directamente sobre la retina.

Si una persona miope se acerca un objeto al ojo, existe una posición en la que ve bien porque los objetos cercanos emiten rayos divergentes que compensan el exceso de convergencia del ojo. Al disminuir la distancia al objeto, los rayos entran al ojo con mayor divergencia, lo que permite que se enfoquen correctamente sobre la retina sin necesidad de lentes correctivas.

Por lo tanto, la solución es explicar que la miopía es un exceso de convergencia del ojo que se corrige con lentes divergentes, y que al acercar un objeto al ojo, la divergencia de los rayos incidentes permite al ojo miope enfocar correctamente.

Cuestión 8. Física Moderna

Un muon (partícula elemental) generado por un rayo cósmico en la atmósfera, a 10 km de altura, viaja hacia el suelo, donde se determina que su velocidad (constante) es $v = 0,98c$. Calcula cuánto tiempo dura el vuelo del muon según una observadora situada en el suelo y también según otra que viaje con el muon. Determina la altura (distancia recorrida por el muon) según la observadora que viaja con el muon.

Dato: velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

Solución:

Para resolver este problema, analizaremos dos sistemas de referencia: el de la observadora situada en el suelo y el de la observadora que viaja con el muón. La distancia que recorre el muón es $e = 10\,000\,\text{m}$ y su velocidad es $v = 0{,}98\,c$, donde $c = 3 \cdot 10^8\,\text{m/s}$. Utilizamos la fórmula clásica del tiempo:

$$t = \frac{e}{v} = \frac{10\,000\,\text{m}}{0{,}98 \cdot 3 \cdot 10^8\,\text{m/s}} = \frac{10\,000}{2{,}94 \cdot 10^8} = 3{,}4 \cdot 10^{-5}\,\text{s}.$$

Entonces, el tiempo de vuelo según la observadora en el suelo es $t = 3{,}4 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$. Debemos considerar los efectos de la relatividad especial, específicamente la dilatación del tiempo. Primero, calculamos el coeficiente de Lorentz (γ):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}98)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}9604}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}0396}} = 5{,}025.$$

Luego, aplicamos la fórmula de la dilatación del tiempo:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{3{,}4 \cdot 10^{-5}\,\text{s}}{5{,}025} = 6{,}766 \cdot 10^{-6}\,\text{s}.$$

Así, el tiempo de vuelo según la observadora que viaja con el muón es $\Delta t' = 6{,}766 \cdot 10^{-6}\,\text{s}$. Utilizamos la contracción de la longitud:

$$L' = \frac{L}{\gamma} = \frac{10\,000\,\text{m}}{5{,}025} = 1\,990\,\text{m}.$$

Entonces, la altura según la observadora que viaja con el muón es $L' = 1\,990\,\text{m}$.

Por lo tanto, el muón tarda $3{,}4 \cdot 10^{-5}$ s según la observadora en el suelo y $6{,}766 \cdot 10^{-6}$ s según la observadora que viaja con el muón. Además, la altura recorrida por el muón según la observadora que viaja con él es de 1 990 m.

Problema 1. Campo Gravitatorio

El proyecto Starlink ha colocado en órbita circular alrededor de la Tierra unos 300 satélites para comunicaciones, que son fácilmente visibles desde la superficie de la Tierra. Sabiendo que la velocidad de uno de dichos satélites es de $7,6$ km/s:

a) **Calcula la altura h a la que se encuentra desde la superficie terrestre (en kilómetros).**
b) **¿Cuántas órbitas circulares completas describe el satélite en un día?**

Datos: constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²; masa de la Tierra, $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; radio de la Tierra, $R_T = 6400$ km

Solución:

a) **Calcula la altura h a la que se encuentra desde la superficie terrestre (en kilómetros).**

La única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria. Dado que el movimiento del satélite es circular uniforme, según el segundo principio de la dinámica de Newton, podemos escribir:

$$F_g = m \cdot a_c,$$

donde:

$$F_g = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} \quad \text{y} \quad a_c = \frac{v^2}{r}.$$

Igualando las dos expresiones:

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Simplificando m y una de las r:

$$\frac{G \cdot M_T}{r} = v^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{G \cdot M_T}{v^2},$$

donde r es la distancia desde el centro de la Tierra al satélite. La altura h sobre la superficie terrestre se obtiene restando el radio de la Tierra R_T:

$$r = R_T + h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{G \cdot M_T}{v^2} - R_T.$$

Sustituyendo los datos proporcionados:

$$v = 7{,}6\,\text{km/s} = 7{,}6 \cdot 10^3\,\text{m/s},$$

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2, \quad M_T = 6 \cdot 10^{24}\,\text{kg}, \quad R_T = 6{,}4 \cdot 10^6\,\text{m}.$$

Calculamos h:

$$h = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{(7{,}6 \cdot 10^3\,\text{m/s})^2} - 6{,}4 \cdot 10^6\,\text{m} = 529\,\text{km}.$$

Por lo tanto, la altura h a la que se encuentra el satélite desde la superficie terrestre es de 529 km.

b) **¿Cuántas órbitas circulares completas describe el satélite en un día?**

Para determinar el número de órbitas que realiza el satélite en un día, primero calculamos el período T de una órbita completa. Utilizamos la relación entre la velocidad v, el período T y el radio de la órbita r:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v},$$

donde:

$$r = R_T + h = 6{,}4 \cdot 10^6\,\mathrm{m} + 5{,}29 \cdot 10^5\,\mathrm{m} = 6{,}929 \cdot 10^6\,\mathrm{m}.$$

Sustituyendo los valores:

$$T = \frac{2\pi \cdot 6{,}929 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}{7{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s}} = 5{,}728 \cdot 10^3\,\mathrm{s} = 1{,}59\,\mathrm{horas}.$$

Para determinar el número de órbitas en un día (24 horas):

$$n = \frac{24\,\mathrm{horas}}{1{,}59\,\mathrm{horas}} = 15{,}1.$$

Por lo tanto, el satélite describe aproximadamente 15 órbitas circulares completas en un día.

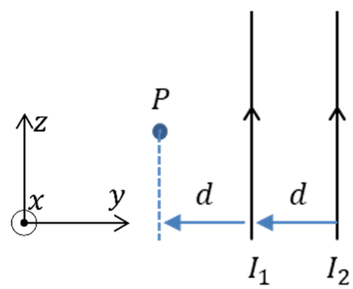
Problema 2. Campo Electromagnético

La figura muestra dos conductores rectilíneos, indefinidos y paralelos entre sí, separados por una distancia d en el plano YZ. Se conoce la intensidad de corriente $I_1 = 1$ A, el módulo del campo magnético que esta corriente crea en el punto P de la figura, $B_1 = 10^{-5}$ T, así como el módulo del campo magnético total $B = 3B_1$.

a) **Calcula la distancia d y el vector campo magnético $\vec{B}_2$ en el punto P.**

b) **Si una carga $q = 1$ μC pasa por dicho punto P con una velocidad $v = 10^6$ k m/s, calcula la fuerza $\vec{F}$ (módulo, dirección y sentido) sobre ella. Representa los vectores $\vec{v}$, $\vec{B}$ y $\vec{F}$.**

Dato: permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T · m/A



Solución:

a) **Calcula la distancia d y el vector campo magnético $\vec{B}_2$ en el punto P.**

Para determinar la distancia d y el campo magnético $\vec{B}_2$, utilizaremos la Ley de Biot-Savart para un conductor rectilíneo infinito, que establece que el módulo del campo magnético en un punto a una distancia r del conductor es:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r},$$

donde:
- B es el módulo del campo magnético en teslas (T),
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T · m/A es la permeabilidad magnética del vacío,
- I es la corriente en amperios (A),
- r es la distancia al conductor en metros (m).

Sabemos que el campo magnético creado por el primer conductor en el punto P es $B_1 = 10^{-5}$ T y que la corriente es $I_1 = 1$ A. Entonces,

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r_1} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot B_1}.$$

Sustituimos los valores:

$$r_1 = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \cdot 1 \text{ A}}{2\pi \cdot 10^{-5} \text{ T}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Se sabe que el campo magnético total en el punto P es $B = 3B_1 = 3 \cdot 10^{-5}$ T. Suponiendo que ambas corrientes tienen el mismo valor ($I_1 = I_2 = 1$ A), el campo magnético creado por el segundo conductor en P es B_2. Como los campos magnéticos se suman vectorialmente y el módulo total es $B = B_1 + B_2$, entonces

$$B = B_1 + B_2 \quad \Rightarrow \quad B_2 = B - B_1 = 3B_1 - B_1 = 2B_1 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

Ahora, usando la expresión del campo magnético para el segundo conductor:

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot r_2} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot B_2}.$$

Sustituimos los valores:

$$r_2 = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A}) \cdot 1\ \mathrm{A}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}} = 1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}.$$

La distancia entre los dos conductores es:

$$d = r_1 + r_2 = 2\ \mathrm{cm} + 1\ \mathrm{cm} = 3\ \mathrm{cm}.$$

El campo magnético $\vec{B}_2$ tiene un módulo de $B_2 = 2 \cdot 10^{-5}$ T. Su dirección y sentido se determinan mediante la regla de la mano derecha, considerando la dirección de la corriente en el segundo conductor: $\vec{B}_2 = 2 \cdot 10^{-5}\,\vec{i}$ T.

Por lo tanto, la distancia d es 3 cm y el vector campo magnético $\vec{B}_2$ en el punto P tiene un módulo de $2 \cdot 10^{-5}$ T, dirigido en el sentido positivo del eje x.

b) Si una carga $q = 1\ \mu$C pasa por dicho punto P con una velocidad $v = 10^6$ k m/s, calcula la fuerza $\vec{F}$ (módulo, dirección y sentido) sobre ella. Representa los vectores $\vec{v}$, $\vec{B}$ y $\vec{F}$.

La fuerza magnética que actúa sobre una carga en movimiento en presencia de un campo magnético viene dada por la Ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Tenemos que:
- $q = 1\ \mu\mathrm{C} = 1 \cdot 10^{-6}$ C,
- $\vec{v} = 10^6\ \mathrm{m/s} \cdot \vec{k}$ (dirección positiva del eje z),
- $\vec{B} = B \cdot \vec{i}$, con $B = 3B_1 = 3 \cdot 10^{-5}$ T (dirección positiva del eje x).

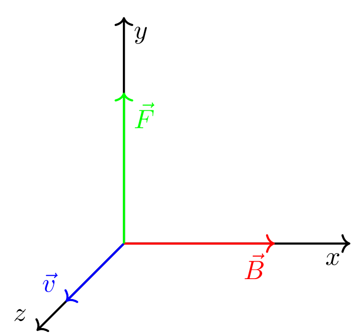
Hallamos el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$:

$$\vec{v} \times \vec{B} = (10^6\ \vec{k}) \times (3 \cdot 10^{-5}\ \vec{i}) = 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-5} (\vec{k} \times \vec{i}) = 30\ (\vec{k} \times \vec{i}) = 30\ \vec{j}.$$

Entonces,

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = (1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}) \cdot 30\ \vec{j} = 3 \cdot 10^{-5}\,\vec{j}\ \mathrm{N}.$$

La fuerza $\vec{F}$ está en la dirección del eje y positivo ($\vec{j}$).



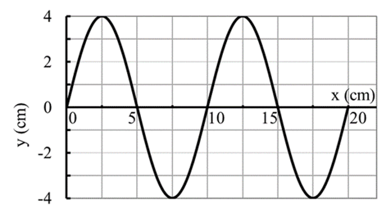
Por lo tanto, la fuerza $\vec{F}$ sobre la carga es de $3 \cdot 10^{-5}$ N, dirigida en la dirección positiva del eje y.

Problema 3. Ondas

Una onda armónica transversal se propaga con velocidad $v = 5$ cm/s en el sentido negativo del eje x. A partir de la información contenida en la figura y justificando la respuesta:

a) **Determina la amplitud, la longitud de onda, el periodo y la diferencia de fase entre dos puntos que distan 15 cm y están separados en el tiempo 3 s.**

b) **Escribe la expresión de la función de onda (usando el seno), suponiendo que la fase inicial es nula. Calcula la velocidad de un punto de la onda situado en $x = 0$ cm para $t = 0$ s.**



Solución:

a) **Determina la amplitud, la longitud de onda, el periodo y la diferencia de fase entre dos puntos que distan 15 cm y están separados en el tiempo 3 s.**

A partir de la gráfica proporcionada, podemos deducir los siguientes datos de la onda armónica transversal:

- *Amplitud:* $A = 4$ cm.
- *Longitud de onda:* $\lambda = 10$ cm.

Además, se nos proporciona la velocidad de propagación de la onda:

$$v = 5 \text{ cm/s}.$$

La relación entre la velocidad de propagación v, la longitud de onda λ y el periodo T es:

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\lambda}{v}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$T = \frac{10 \text{ cm}}{5 \text{ cm/s}} = 2 \text{ s}.$$

La diferencia de fase entre dos puntos que están separados por una distancia $\Delta x = 15$ cm y un intervalo de tiempo $\Delta t = 3$ s se calcula mediante:

$$\Delta\phi = \omega\Delta t + k\Delta x,$$

donde:

- $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2 \text{ s}} = \pi$ rad/s,
- $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{10 \text{ cm}} = \frac{\pi}{5}$ rad/cm.

Sustituyendo estos valores:

$$\Delta\phi = \pi \text{ rad/s} \cdot 3 \text{ s} + \frac{\pi}{5} \text{ rad/cm} \cdot 15 \text{ cm} = 3\pi + 3\pi = 6\pi \text{ rad}.$$

Por lo tanto, la amplitud es $A = 4$ cm, la longitud de onda es $\lambda = 10$ cm, el periodo es $T = 2$ s y la diferencia de fase entre los dos puntos es $\Delta\phi = 6\pi$ rad.

b) Escribe la expresión de la función de onda (usando el seno), suponiendo que la fase inicial es nula. Calcula la velocidad de un punto de la onda situado en $x = 0$ cm para $t = 0$ s.

La ecuación de una onda armónica transversal que se propaga en el sentido negativo del eje x y con fase inicial nula es:

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t + kx),$$

donde:
- $A = 4$ cm es la amplitud,
- $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$ rad/s es la frecuencia angular,
- $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\pi}{5}$ rad/cm es el número de onda.

Sustituyendo los valores:

$$y(x,t) = 4 \text{ cm} \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{5}x\right).$$

La velocidad de un punto de la onda está dada por la derivada de la función de onda respecto al tiempo:

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + kx)$$

Evaluando en $x = 0$ cm y $t = 0$ s:

$$v_y(0,0) = 4 \text{ cm} \cdot \pi \text{ rad/s} \cdot \cos(0+0) = 4\pi \text{ cm/s} = 12{,}57 \text{ cm/s}.$$

Por lo tanto, la expresión de la función de onda es $y(x,t) = 4 \text{ cm} \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{5}x\right)$ y la velocidad del punto situado en $x = 0$ cm para $t = 0$ s es $v_y(0,0) = 12{,}57$ cm/s.

Problema 4. Física Moderna

Una radiación monocromática de longitud de onda 500 nm incide sobre una fotocélula de cesio, cuyo trabajo de extracción es de 2 eV. Calcula:

a) **La frecuencia umbral y la longitud de onda umbral.**
b) **La energía cinética máxima de los electrones emitidos y el potencial de frenado, ambos en eV. Explica qué es el potencial de frenado.**

Datos: carga elemental $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s; constante de Planck, $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J · s

Solución:

a) **La frecuencia umbral y la longitud de onda umbral.**

Para determinar la frecuencia umbral ν_0 y la longitud de onda umbral λ_0, utilizamos la información proporcionada sobre el efecto fotoeléctrico:
- Trabajo de extracción: $W_{\text{ext}} = 2$ eV.
- Longitud de onda de la radiación incidente: $\lambda = 500$ nm $= 500 \cdot 10^{-9}$ m.
- Constante de Planck: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J · s.
- Velocidad de la luz: $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s.
- Conversión de eV a Julios: 1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J.

Conversión del trabajo de extracción a Julios:

$$W_{\text{ext}} = 2 \text{ eV} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV} = 3{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

El trabajo de extracción está relacionado con la frecuencia umbral mediante la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico:

$$W_{\text{ext}} = h \cdot \nu_0 \quad \Rightarrow \quad \nu_0 = \frac{W_{\text{ext}}}{h} = 4{,}85 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

Utilizamos la relación entre la velocidad de la luz, la longitud de onda y la frecuencia:

$$c = \lambda_0 \cdot \nu_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{3 \cdot 10^{8} \text{ m/s}}{4{,}85 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 6{,}19 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 619 \text{ nm}.$$

Por lo tanto, la frecuencia umbral es $\boldsymbol{\nu_0 = 4{,}85 \cdot 10^{14}}$ Hz y la longitud de onda umbral es $\boldsymbol{\lambda_0 = 619}$ nm.

b) **La energía cinética máxima de los electrones emitidos y el potencial de frenado, ambos en eV. Explica qué es el potencial de frenado.**

La energía cinética máxima $E_{c,\text{máx}}$ de los electrones emitidos se obtiene a partir de la energía del fotón incidente E_f y el trabajo de extracción W_{ext}:

$$E_{c,\text{máx}} = E_f - W_{\text{ext}}.$$

Cálculo de la energía del fotón incidente E_f:

$$E_f = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8} \text{ m/s}}{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3{,}96 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Conversión de E_f a eV:

$$E_f = \frac{3{,}96 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 2{,}475 \text{ eV}.$$

Cálculo de la energía cinética máxima $E_{c,\text{máx}}$:

$$E_{c,\text{máx}} = E_f - W_{\text{ext}} = 2{,}475 \text{ eV} - 2 \text{ eV} = 0{,}475 \text{ eV}.$$

El potencial de frenado es el potencial necesario para detener los electrones emitidos, de manera que su energía cinética máxima se compense con la energía potencial eléctrica. Se relaciona con la energía cinética máxima mediante:

$$E_{c,\text{máx}} = q \cdot V_f \quad \Rightarrow \quad V_f = \frac{E_{c,\text{máx}}}{q},$$

donde $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C es la carga elemental:

$$V_f = \frac{0{,}475 \text{ eV}}{1} = 0{,}475 \text{ V}.$$

El potencial de frenado es el potencial eléctrico que se aplica para oponerse al movimiento de los electrones emitidos, de manera que impida su llegada al ánodo. Al aplicar este potencial, se logra que la energía cinética de los electrones emitidos sea contrarrestada, deteniendo su movimiento.

Por lo tanto, la energía cinética máxima de los electrones emitidos es 0,475 eV y el potencial de frenado es $V_f = 0{,}475$ V. El potencial de frenado es el potencial necesario para detener los electrones emitidos, impidiendo que lleguen al ánodo al contrarrestar su energía cinética.